| Mathématiques 2nd | Chapitre 12 : Fonction affines | Fonctions |
|---|---|---|

## I – Généralités :

### a) Définition :

> On appelle **fonction affine** toute fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $\boldsymbol{f(x) = mx + p}$ .
>
> - $m$ est un nombre réel appelé **coefficient directeur** ;
> - $p$ est un nombre réel appelé **ordonnée à l'origine**

**Remarque :**

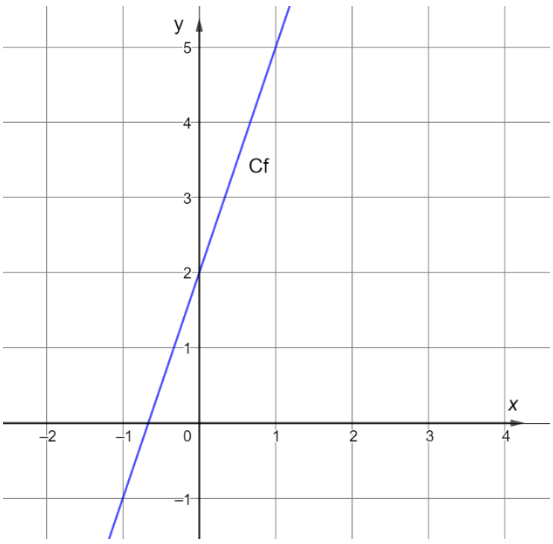
- La notation $f(x) = ax + b$ , n'est plus utilisée au lycée, pour ne pas confondre avec les notations des équations cartésienne de droites.
- Si $m = 0$ , la fonction est constante.
- Si $p = 0$, la fonction est linéaire et traduit une situation de proportionnalité.

**Exemples**

- La fonction $g$ telle que $g(x) = 5x^2 + 7$ est-elle affine ?
- La fonction $h$ telle que $h(x) = 9x + 8$ est-elle affine ?
- La fonction $k$ telle que $k(x) = 3 - 5x$ est-elle affine ?

**À retenir : pour qu'une fonction soit affine, il ne doit pas y avoir de $\boldsymbol{x^2}$ ou de $\boldsymbol{x^3}$ ou de $\boldsymbol{\frac{1}{x}}$ …**

### b) Déterminer une image ou un antécédent d'une fonction affine

| Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$: | |
|---|---|
| **Par le calcul** | **Graphiquement** |
| Calculer l'image de 4 par la fonction $f$<br><br><br><br>Déterminer l'antécédent de 20 par la fonction $f$ | Déterminer graphiquement l'image de 0 par la fonction $f$ et l'antécédent de 5<br> |

### c) Représentation graphique

Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.
Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.
Cette droite a pour équation $\boldsymbol{y = mx + p}$

- La constante multiplicative $m$ est la pente (appelé coefficient directeur) de la droite $d$.
- La constante additive $p$, s'appelle l'ordonnée à l'origine : c'est la valeur en laquelle la droite traverse l'axe des ordonnées.

**Remarque :**

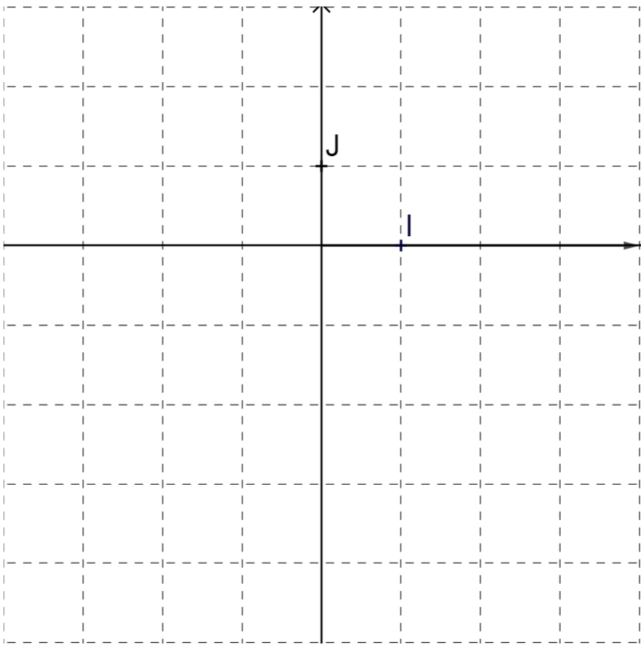
- Si la fonction est linéaire, alors cette droite passe par l'origine du repère.

En effet, si $f$ est linéaire, son expression est de la forme $f(x) = mx$ (où $m$ est un nombre réel) et $f(0) = m \times 0 = 0$.

- Si la fonction est constante, alors cette droite est parallèle à l'axe des abscisses (c'est une droite horizontale).

**Méthode :**
Pour tracer la droite représentative d'une fonction affine (ou une droite d'équation donnée) :
- On choisit deux valeurs $x_A$ et $x_B$ assez éloignées
- On calcule les images $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$
- On place les points A et B correspondants et on trace à la règle la droite (AB).

**Exemple :**
Dans le repère orthonormé $(O\,;I,J)$ ci-contre, tracer les droites représentatives d, $d_1$ et $d_2$ des fonctions affines $f$, $g$ et $h$ définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :




$f(x) = 3x - 4$

$g(x) = -2x$

$h(x) = -3$

### d) Proportionnalité des accroissements :

Soit $f$ une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$ , où m et p sont deux réels.

Pour tous nombres réels $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 \neq x_2$ , $m = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$

**Preuve :**

*Soient $x_1$ et $x_2$ tels que $x_1 < x_2$. Calculons le taux d'accroissement de $f$ affine entre $x_1$ et $x_2$ :*

$$\tau = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{(mx_2+p)-(mx_1+p)}{x_2-x_1} = \frac{mx_2+p-mx_1-p}{x_2-x_1} = \frac{m(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = m$$

*Le taux d'accroissement est donc toujours égal au coefficient directeur, quelles que soient les deux abscisses choisies.*
*La courbe de $f$ évolue donc toujours de la même façon : c'est une droite.*

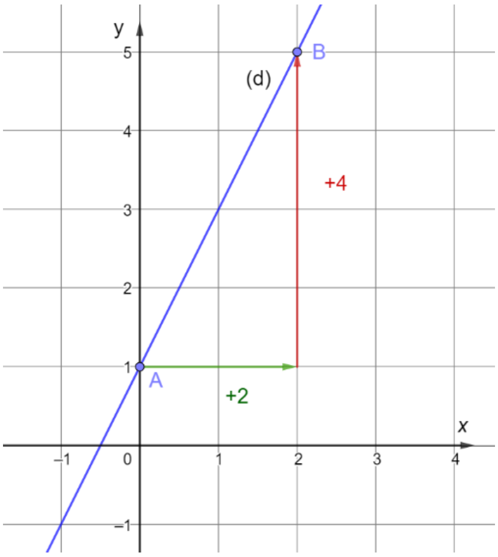
**Méthode :**
Pour lire **l'équation d'une droite**, il suffit de trouver $\boldsymbol{p}$ et $\boldsymbol{m}$ :

- On repère l'ordonnée à l'origine $p$, c'est-à-dire la valeur où la droite traverse l'axe des ordonnées
- On repère deux points de la droite et dont les coordonnées sont les plus précises possibles

et on calcule $m$ avec la formule $\boldsymbol{m} = \frac{\textbf{déplacement vertical}}{\textbf{déplacement horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

❖ **Déterminer l'expression algébrique :**

**Déterminer la formule de la fonction $f$ représentée graphiquement dans le repère ci-contre par la droite $(d)$.**




## II – Sens de variations, signe d'une fonction affine :

### a) Définition :

Une fonction affine est toujours monotone, et son sens de variation est donné par le signe de son coefficient directeur $m$ :

- Si $m$ est positif, la fonction est croissante.
- Si $m$ est négatif, la fonction est décroissante.

**Exemple 1 :** $f(x) = 8x - 2$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

**Exemple 2 :** $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | |

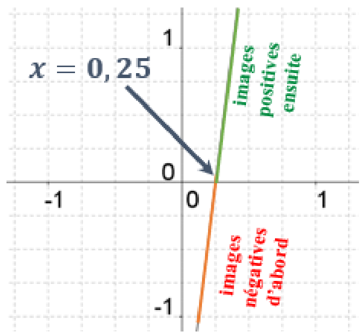
### b) Signe :

Si une fonction affine $f$ n'est pas constante, sa droite représentative n'est pas horizontale donc elle traverse toujours une seule fois l'axe des abscisses. On trouve cette racine en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

> **Méthode :**
> Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine :
> • On cherche sa racine en résolvant $f(x) = 0$.
> • Pour trouver le signe de $f(x)$ de part et d'autre de cette racine, on regarde le signe de $m$, qui donne les variations de $f$ : si elle est croissante, elle ira du ⊖ vers le ⊕ et si elle est décroissante, elle ira du ⊕ vers le ⊖

**Exemples :**

1) Etablir le tableau de signe de la fonction $f$ définie par $f(x) = 8x - 2$ .



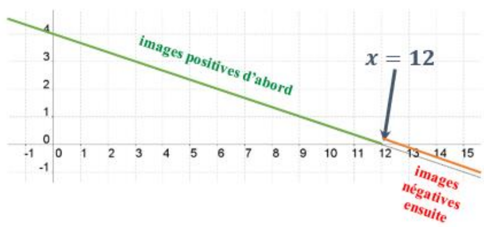

$f$ s'annule lorsque $8x - 2 = 0$ c'est-à-dire lorsque $x = \frac{1}{4}$.
$m = 8 > 0$ , donc elle $f$ est croissante et va du ⊖ vers le ⊕.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $f(x)$ | |

2) Etablir le tableau de signe de la fonction $f$ définie par $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$ .

g s'annule lorsque $-\frac{1}{3}x + 4 = 0$ c'est-à-dire lorsque $x = 12$.
$m = -\frac{1}{3} < 0$ , donc elle $g$ est décroissante et va du ⊕ vers le ⊖.

| $x$ | $-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $g(x)$ | |



**Propriété :**

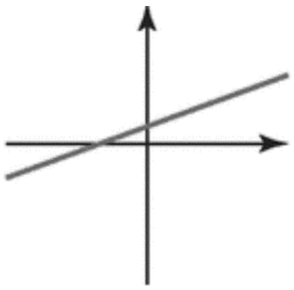
Soit $a$ et $b$ deux nombres réels avec $a \neq 0$.

La fonction affine $f$ définie sur par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\frac{b}{a}$ .

| $a > 0$ | $a < 0$ |
| --- | --- |

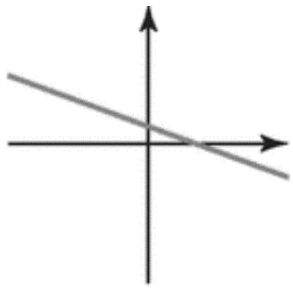
**$a > 0$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(x)$ | | $-$ | 0 | $+$ | |



**$a < 0$**

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{b}{a}$ | | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f(x)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

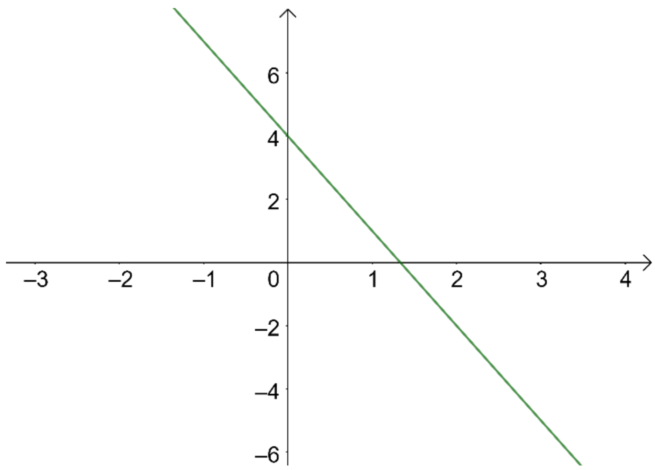


❖ **Exercice (en utilisant la résolution d'une inéquation)** :

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 4$ .

.

| $x$ | $-\infty$ | | $\frac{4}{3}$ | | $+\infty$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $-3x+4$ | | $+$ | 0 | $-$ | |

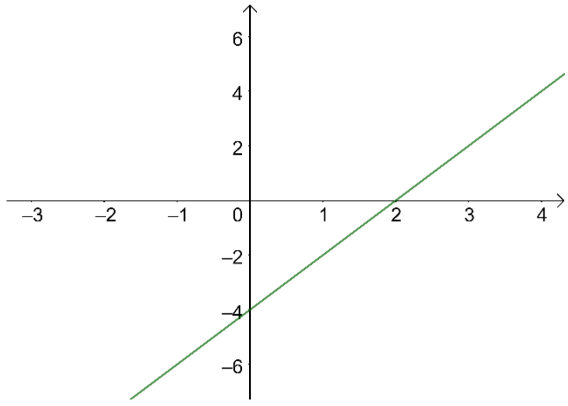


## II – Tableaux de signes et inéquations :

### a) Signe de $ax + b$ ( a et b réels ) :

❖ **Exemples :**

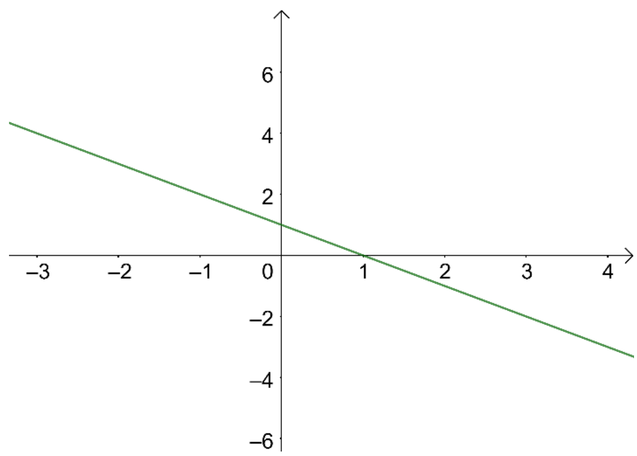
***Déterminer le signe de $2x - 4$ selon les valeurs de $x$.***




| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $2x - 4$ | |

***Déterminer le signe de $-x + 1$ selon les valeurs de $x$.***

| $x$ | $-\infty$ $\qquad$ $+\infty$ |
|---|---|
| $-x + 1$ | |




### b) Tableau de signes d'un produit :

❖ **Règle des signes :**

Pour déterminer le signe d'un produit, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes :

- Le produit de 2 nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

❖ **Exemples :**

- **Résoudre l'inéquation $(x + 1)(-x - 3) < 0$ dans $\mathbb{R}$.**

| $x$ | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $x + 1$ | | | | |
| $-x - 3$ | | | | |
| $(x + 1)(-x - 3)$ | | | | |

### c) Tableau de signes d'un quotient :

❖ **Règle des signes :**

Pour déterminer le signe d'un quotient, on étudie les signes du numérateur et du dénominateur et on applique la règle des signes à l'aide d'un tableau de signes.

❖ **Exemples :**

- **Résoudre l'inéquation $\frac{-x+1}{x-2} \leq 0$**

| $x$ | $-\infty$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $-x+1$ | | | | |
| $x-2$ | | | | |
| $\frac{-x+1}{x-2}$ | | | | |