

Mathématiques 2 nd	Chapitre 12 : Fonction affine	Fonctions
-------------------------------	-------------------------------	-----------

I – Généralités :

a) Définition :

On appelle **fonction affine** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = mx + p$.

- m est un nombre réel appelé **coefficient directeur** ;
- p est un nombre réel appelé **ordonnée à l'origine**

Remarque :

- La notation $f(x) = ax + b$, n'est plus utilisée au lycée, pour ne pas confondre avec les notations des équations cartésienne de droites.
- Si $m = 0$, la fonction est constante.
- Si $p = 0$, la fonction est linéaire et traduit une situation de proportionnalité.

Exemples

- La fonction g telle que $g(x) = 5x^2 + 7$ est-elle affine ?

Non. Pour qu'elle soit affine, il faut que la variable x soit multipliée par un nombre constant m , puis additionné d'un nombre constant p . Ici, x est d'abord multiplié par lui-même.

- La fonction h telle que $h(x) = 9x + 8$ est-elle affine ?

C'est une fonction affine avec $m = 9$ et $p = 8$

- La fonction k telle que $k(x) = 3 - 5x$ est-elle affine ?

C'est une fonction affine avec $m = -5$ et $p = 3$

À retenir : pour qu'une fonction soit affine, il ne doit pas y avoir de x^2 ou de x^3 ou de $\frac{1}{x}$...

b) Déterminer une image ou un antécédent d'une fonction affine

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x + 2$:	
Par le calcul	Graphiquement
Calculer l'image de 4 par la fonction f	Déterminer graphiquement l'image de 0 par la fonction f et l'antécédent de 5
$f(4) = 3 \times 4 + 2 = 14$	
L'image du nombre 4 par la fonction f est 14	
Déterminer l'antécédent de 20 par la fonction f	
Cela revient à résoudre l'équation $f(x) = 20$ équivaut à $3x + 2 = 20$ $\Leftrightarrow 3x = 18$ $\Leftrightarrow \frac{3x}{3} = \frac{18}{3} \Leftrightarrow x = 6$	
L'antécédent de 20 par la fonction f est 6	L'image du nombre 0 par la fonction f est 2. On le note $f(0) = 2$ L'antécédent du nombre 5 par la fonction f est 1.

c) Représentation graphique

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$.

Dans le plan muni d'un repère, la courbe représentative d'une fonction affine est une **droite**.

Cette droite a pour équation $y = mx + p$

- La constante multiplicative m est la pente (appelé coefficient directeur) de la droite d .
- La constante additive p , s'appelle l'ordonnée à l'origine : c'est la valeur en laquelle la droite traverse l'axe des ordonnées.

Remarque :

- Si la fonction est linéaire, alors cette droite passe par l'origine du repère.
- En effet, si f est linéaire, son expression est de la forme $f(x) = mx$ (où m est un nombre réel) et $f(0) = m \times 0 = 0$.
- Si la fonction est constante, alors cette droite est parallèle à l'axe des abscisses (c'est une droite horizontale).

Méthode :

Pour tracer la droite représentative d'une fonction affine (ou une droite d'équation donnée) :

- On choisit deux valeurs x_A et x_B assez éloignées
- On calcule les images $y_A = mx_A + p$ et $y_B = mx_B + p$
- On place les points A et B correspondants et on trace à la règle la droite (AB).

Exemple :

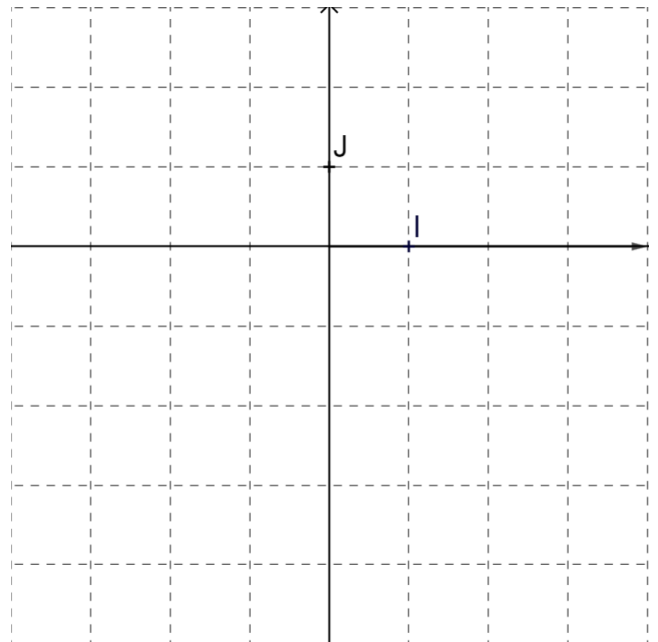
Dans le repère orthonormé $(O ; I, J)$ ci-contre, tracer les

droites représentatives d , d_1 et d_2 des fonctions affines f , g et h définies respectivement sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x - 4$$

$$g(x) = -2x$$

$$h(x) = -3$$



d) Proportionnalité des accroissements :

Soit f une fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$, où m et p sont deux réels.

Pour tous nombres réels x_1 et x_2 tels que $x_1 \neq x_2$, $m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$

Preuve :

Soient x_1 et x_2 tels que $x_1 < x_2$. Calculons le taux d'accroissement de f affine entre x_1 et x_2 :

$$\tau = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{(mx_2 + p) - (mx_1 + p)}{x_2 - x_1} = \frac{mx_2 + p - mx_1 - p}{x_2 - x_1} = \frac{m(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = m$$

Le taux d'accroissement est donc toujours égal au coefficient directeur, quelles que soient les deux abscisses choisies.

La courbe de f évolue donc toujours de la même façon : c'est une droite.

Méthode :

Pour lire l'équation d'une droite, il suffit de trouver p et m :

- On repère l'ordonnée à l'origine p , c'est-à-dire la valeur où la droite traverse l'axe des ordonnées
- On repère deux points de la droite et dont les coordonnées sont les plus précises possibles

et on calcule m avec la formule $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

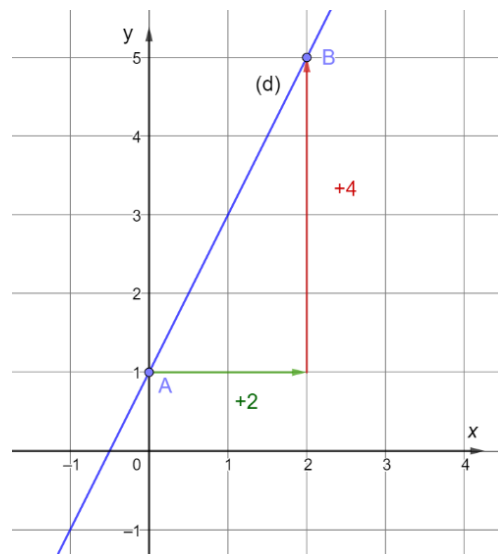
❖ Déterminer l'expression algébrique :

Déterminer la formule de la fonction f représentée graphiquement dans le repère ci-contre par la droite (d) .

La droite (d) coupe l'axe des ordonnées en 1 donc $p = 1$.

$$m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{2} = 2$$

La fonction f est donc définie par $f(x) = 2x + 1$



II – Sens de variations, signe d'une fonction affine :

a) Définition :

Une fonction affine est toujours monotone, et son sens de variation est donné par le signe de son coefficient directeur m :

- Si m est positif, la fonction est croissante.
- Si m est négatif, la fonction est décroissante.

Exemple 1 : $f(x) = 8x - 2$

La pente $m = 8 > 0$ donc la fonction est croissante

on dit que la courbe de f « monte » :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$		

Exemple 2 : $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$

La pente $m = -\frac{1}{3} < 0$ donc la fonction est décroissante

on dit que la courbe de f « descend » :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		

b) Signe :

Si une fonction affine f n'est pas constante, sa droite représentative n'est pas horizontale donc elle traverse toujours une seule fois l'axe des abscisses. On trouve cette racine en résolvant l'équation $f(x) = 0$.

Méthode :

Pour dresser le tableau de signes d'une fonction affine :

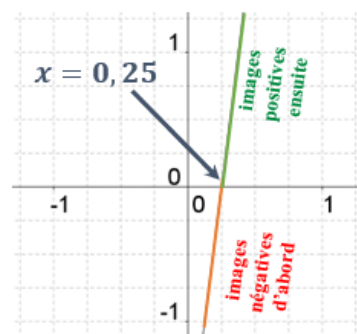
- On cherche sa racine en résolvant $f(x) = 0$.
- Pour trouver le signe de $f(x)$ de part et d'autre de cette racine, on regarde le signe de m , qui donne les variations de f : si elle est croissante, elle ira du $\ominus$ vers le $\oplus$ et si elle est décroissante, elle ira du $\oplus$ vers le $\ominus$

Exemples :

- 1) Etablir le tableau de signe de la fonction f définie par $f(x) = 8x - 2$

f s'annule lorsque $8x - 2 = 0$ c'est-à-dire lorsque $x = \frac{1}{4}$.
 $m = 8 > 0$, donc elle f est croissante et va du $\ominus$ vers le $\oplus$.

x	$-\infty$	$0,25$	$+\infty$
$f(x)$	$-$	0	$+$

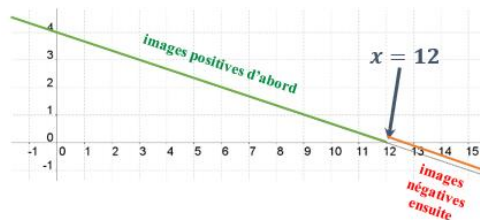


- 2) Etablir le tableau de signe de la fonction f définie par $g(x) = -\frac{1}{3}x + 4$.

g s'annule lorsque $-\frac{1}{3}x + 4 = 0$ c'est-à-dire lorsque $x = 12$.

$m = -\frac{1}{3} < 0$, donc elle g est décroissante et va du $\oplus$ vers le $\ominus$.

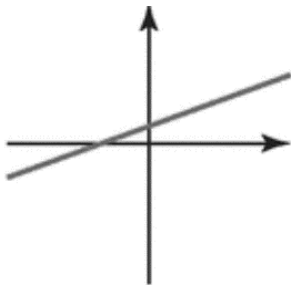
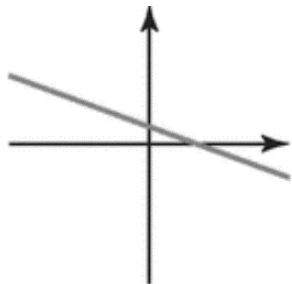
x	$-\infty$	12	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$



Propriété :

Soit a et b deux nombres réels avec $a \neq 0$.

La fonction affine f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax + b$ s'annule et change de signe une fois dans son ensemble de définition en $x = -\frac{b}{a}$.

$a > 0$		$a < 0$	
x	$-\infty \quad -\frac{b}{a} \quad +\infty$	x	$-\infty \quad -\frac{b}{a} \quad +\infty$
$f(x)$	$- \quad 0 \quad +$	$f(x)$	$+ \quad 0 \quad -$
 f est négative puis positive		 f est positive puis négative	

❖ **Exercice (en utilisant la résolution d'une inéquation) :**

Dresser le tableau de signes de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -3x + 4$.

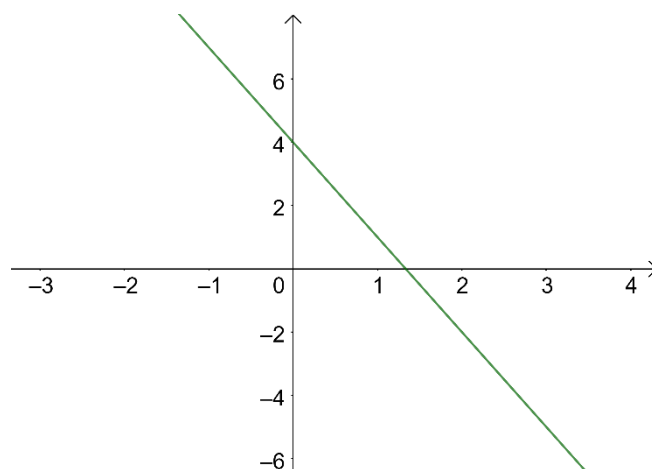
On résout l'inéquation $-3x + 4 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -3x \geq -4$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{4}{3} \quad \text{car } -3 \text{ est négatif}$$

Ainsi, $-3x + 4$ est positif si, et seulement si, x est inférieur ou égale à $\frac{4}{3}$.

x	$-\infty$	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$-3x + 4$	$+$	0	$-$



II – Tableaux de signes et inéquations :

a) Signe de $ax + b$ (a et b réels) :

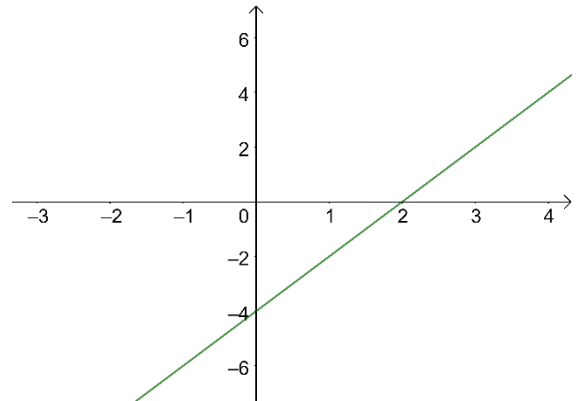
❖ Exemples :

Déterminer le signe de $2x - 4$ selon les valeurs de x .

On résout l'inéquation $2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$.

Ainsi, $2x - 4$ est positif si, et seulement si, x est supérieur ou égale à 2.

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$2x - 4$	-	0	+



Déterminer le signe de $-x + 1$ selon les valeurs de x .

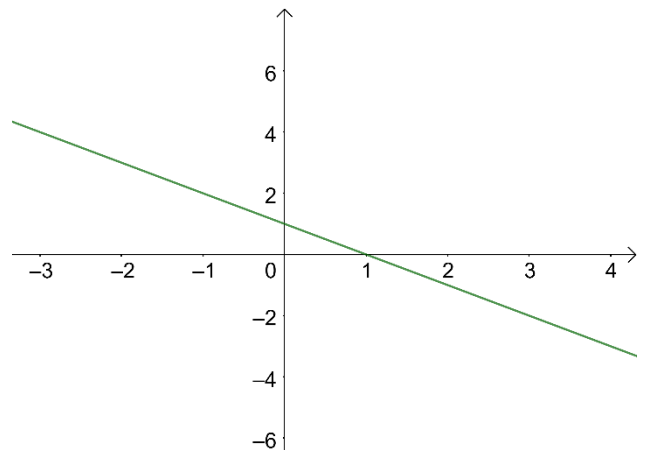
On résout l'inéquation $-x + 1 \geq 0$

$$\Leftrightarrow -x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1.$$

Ainsi, $-x + 1$ est positif si, et seulement si, x est inférieur ou égale à 1.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$-x + 1$	+	0	-



b) Tableau de signes d'un produit :

❖ Règle des signes :

Pour déterminer le signe d'un produit, on détermine le signe de chaque facteur et on applique la règle des signes :

- Le produit de 2 nombres de même signe est positif.
- Le produit de deux nombres de signes contraires est négatif.

❖ Exemples :

- Résoudre l'inéquation $(x + 1)(-x - 3) < 0$ dans $\mathbb{R}$.

On résout les inéquations :

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1.$$

$$-x - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3.$$

On étudie le signe de $(x - 3)(x + 2)$ pour lire les solutions dans le tableau de signes.

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
$x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	
$-x - 3$	$+$	0	$-$	$-$	
$(x + 1)(-x - 3)$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que les solutions sont les nombres x tels que $x \in]-\infty; -3[\cup]-1; +\infty[$

c) Tableau de signes d'un quotient :

❖ Règle des signes :

Pour déterminer le signe d'un quotient, on étudie les signes du numérateur et du dénominateur et on applique la règle des signes à l'aide d'un tableau de signes.

❖ Exemples :

- Résoudre l'inéquation $\frac{-x+1}{x-2} \leq 0$

$x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$, donc on résout l'inéquation dans $\mathbb{R} - \{2\}$.

$-x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$-x + 1$	+	0	-	-
$x - 2$	-	-	0	+
$\frac{-x+1}{x-2}$	-	0	+	-

L'ensemble des solutions est donc

$$S =]-\infty; 1] \cup]2; +\infty[$$

