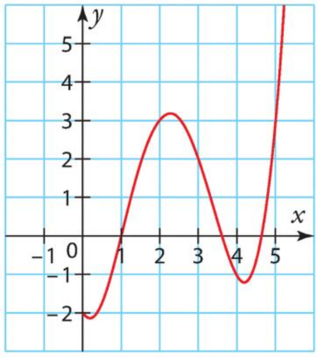
Mathématiques 1ère EDS	Devoir en Temps Libre n°14	Correction

Exercice 1 :

Soit (u_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n \in \mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$.

On donne ci-contre la courbe représentative de la fonction f.
Déterminer la valeur des cinq premiers termes de la suite (u_n).



n	0	1	2	3	4
u_n	-2	0	3	2	-1

Exercice 2 :

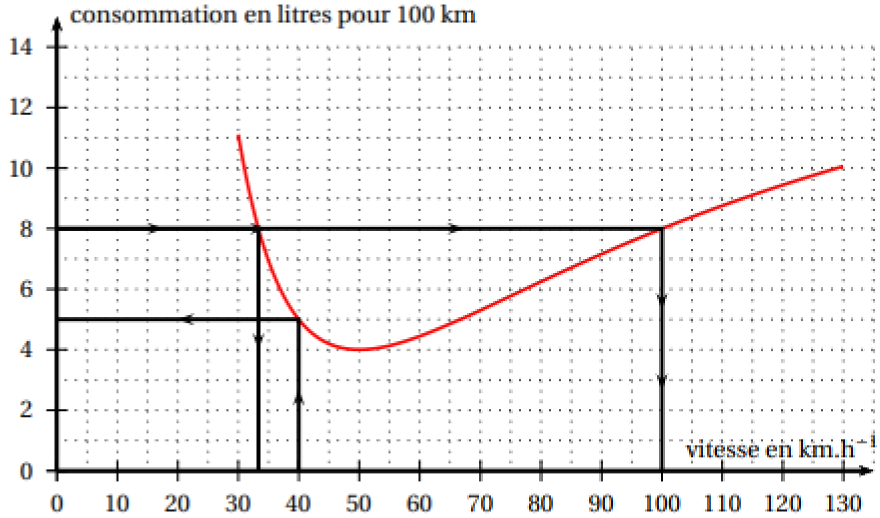
Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$
et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_{n+1} = 2u_n + 1$
Recopier et compléter l'algorithme suivant pour qu'il calcule la somme des 50 premiers termes de la suite (u_n)

```
U ← …
S ← 0
Pour i allant de … à …
  S ← …
  U ← …
Fin pour
```

```
u←1
S←0
Pour i allant de 0 à 49
    S←S+u
    u←2*u+1
Fin pour
```

Exercice 3 :

On s'intéresse à la consommation d'essence d'un véhicule en fonction de sa vitesse. Le graphique ci-dessous représente la consommation d'essence en litres pour 100 km en fonction de la vitesse en km/h du véhicule.



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes :

1. Quelle est la consommation du véhicule lorsque celui-ci roule à 40 km/h.?
   On lit environ 5 l.

2. Pour quelle(s) vitesse(s) le véhicule consomme-t-il 8 litres pour 100 km ?
   On lit environ 33,3 km/h ou 100 km/h.
3. Pour quelle vitesse la consommation du véhicule semble-t-elle minimale ?
   La consommation semble la plus basse à une vitesse de 50 km/h

Modélisation :

Si on note x est la vitesse du véhicule en km/h , avec $30 \leq x \leq 130$, la consommation d'essence en litres pour 100 km est modélisée par la fonction f d'expression :

$$f(x) = \frac{20x^2 - 1600x + 40000}{x^2}$$

On désigne par f' la fonction dérivée de la fonction f sur l'intervalle [30; 130].

4. 4. Montrer que pour tout $x \in [30; 130]$,

$$f'(x) = \frac{800(2x - 100)}{x^3}$$

f est une fonction rationnelle dérivable sur tous les intervalles de son ensemble de définition soit pour tout $x \in [30; 130]$.

On a $u(x) = 20x^2 - 1600x + 40000$ $\qquad u'(x) = 40x - 1600$

$v(x) = x^2$ $\qquad v'(x) = 2x$ et on utilise la formule : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu'-uv\prime}{v}$

$$f'(x) = \frac{x^2(40x - 1600) - 2x \times (20x^2 - 1600x + 40000)}{x^4}$$

$$= \frac{40x^3 - 1600x^2 - 40x^3 + 3200x^2 - 80000x}{x^4} = \frac{1600x^2 - 80000x}{x^4} = \frac{800x(2x - 100)}{x \times x^3}$$

$= \frac{800(2x-100)}{x^3}$ *CQFD*

et étudier les variations de la fonction f :

Pour tout $x \in [30; 130]$, on a $800 > 0$ et $x^2 > 0$ donc le signe de f' est le signe de $(2x - 100)$ qui est une expression du 1er degré :

$$2x - 100 < 0 \Leftrightarrow 2x < 100 \Leftrightarrow x < 50$$

Du signe de la dérivée, on en déduit que f est décroissante pour $x < 50$ et croissante pour $x > 50$:

$f\ (50) = (20 \times 502 - 1600 \times 50 + 40000) \div (50^2) = 4$

5. En déduire la preuve de la conjecture de la question 3.

4 est donc le minimum de la fonction atteint en $x = 50$ car la dérivée s'annule et change de signe en $x = 50$

Donc la vitesse pour laquelle la consommation du véhicule est minimale est bien 50km/h.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto x^2 + 5x - 4$ et

$\mathcal{C}f$ sa courbe représentative dans un repère du plan. Soit a un nombre réel.

1. Démontrer que l'équation de la tangente à $\mathcal{C}f$ en a est $y = (2a + 5)x - a^2 - 4$.

L'équation de la tangente en $x = a$ est : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

La fonction polynôme f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et,

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $\quad f'(x) = 2x + 5$

$f'(a) = 2a + 5$

$f(a) = a^2 + 5a - 4$

Ainsi l'équation de la tangente est :

$y = (2a+5)(x-a) + a^2 + \ 5a - 4 = 2ax - 2a^2 + 5x - 5a + a^2 + \ 5a - 4$
$y = (2a+5)x - a^2 - 4$

2. En déduire que $\mathcal{C}_f$ admet deux tangentes passant par le point de coordonnées (1 ; – 7) et donner l'équation de ces deux tangentes.

Une tangente passe par le point de coordonnées (1 ; – 7) si et seulement si , ces coordonnées sont solutions de l'équation de la tangente.
C'est-à-dire $\quad -7 = (2a+5) \times 1 - a^2 - 4$
$\Leftrightarrow\ -7 = -a^2 + 2a + 5 - 4 \ \Leftrightarrow\ -a^2 + 2a + 8 = 0$

Calculons le déterminant $\Delta = 2^2 - 4 \times (-1) \times 8 = 36 > 0$, l'équation possède deux solutions distinctes :
$a_1 = \frac{-2-6}{-2} = 4$ et $a_2 = \frac{-2+6}{-2} = -2$

Si $a = 4$, l'équation est $y = (2 \times 4 + 5)x - 4^2 - 4 \Leftrightarrow y = 13x - 20$
Si $a = -2$, l'équation est $y = (2 \times (-2) + 5)x - (-2)^2 - 4 \Leftrightarrow y = x - 8$