Exercice 1 :

1^{ère} partie

On considère la fonction f définie et dérivable sur $[5 ; 60]$ par $f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$

1) Démontrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 400}{x^2}$

$$\forall x \in [5 ; 60] \text{ on a : } f'(x) = \frac{x(2x - 15) - (x^2 - 15x + 400) \times 1}{x^2} = \frac{2x^2 - 15x - x^2 + 15x - 400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2}$$

2) Etudier le signe de f' sur $[5 ; 60]$

3) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $[5 ; 60]$.

$$\forall x \in [5 ; 60] \quad f'(x) = \frac{x^2 - 20^2}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

$a = 1 > 0$, donc Le polynôme degré $x^2 - 400$ est positif sauf entre ses racines -20 et 20 .

En en déduit le tableau de variation :

:

x	5		20		60	
$f'(x)$		-	0	+		
$f(x)$	70	↘		25	↗	
					$\frac{155}{3}$	

$$f(5) = \frac{5^2 - 15 \times 5 + 400}{5} = 70 \quad f(20) = 25 \quad \text{et} \quad f(60) = \frac{155}{3}$$

2^{ème} partie :

Une entreprise fabrique un engrais biologique. Chaque jour, le volume d'engrais fabriqué est compris entre 5 m^3 et 60 m^3 .

Le coût moyen quotidien de production de cet engrais, exprimé en centaine d'euros, est modélisé par la

fonction f , de la première partie, définie sur l'intervalle $[5 ; 60]$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 15x + 400}{x}$

où x est le volume quotidien d'engrais fabriqué, exprimé en m^3 .

1) Déterminer le coût moyen quotidien pour la production de 5 m^3 d'engrais.

Le coût moyen quotidien pour la production de 5 mètres cube d'engrais est :

$$f(5) = \frac{5^2 - 15 \times 5 + 400}{5} = 70 \quad \text{soit} \quad 7000 \text{ euros.}$$

2) Pour quel volume d'engrais fabriqué le coût moyen de production est-il minimal ? Déterminer ce coût moyen minimal.

D'après le tableau de variation de la fonction sur $[5 ; 60]$, f admet un minimum local en $x = 20$ puisque la dérivée s'annule en changeant de signe en $x = 20$ donc le coût de production sera minimal pour un volume d'engrais fabriqué de 20 mètres cube et le coût sera de 2500 euros.

Exercice 2 :

1) Calculer les trois premiers termes de la suite (V_n) sachant que :

pour $n \in \mathbb{N}$: $V_n = \frac{n}{3+n}$ puis étudier le sens de variation de cette suite en étudiant la fonction associée.

$$V_0 = \frac{0}{3+0} = 0 \quad ; \quad V_1 = \frac{1}{3+1} = \frac{1}{4} \quad ; \quad V_2 = \frac{2}{3+2} = \frac{2}{5}$$

Considérons la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \frac{x}{3+x}$ f est une fonction rationnelle dérivable sur tous les intervalles de son ensemble de définition et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$f'(x) = \frac{(3+x) \times 1 - 1 \times x}{(3+x)^2} = \frac{3+x-x}{(3+x)^2} = \frac{3}{(3+x)^2}$$

$\forall x \in \mathbb{R}_+ (3+x)^2 > 0$ et 3 positif donc le signe de f' est positif, la fonction est donc croissante sur $\mathbb{R}_+$ et la suite (V_n) telle que pour $n \in \mathbb{N}$: $V_n = f(n)$ est donc croissante sur $\mathbb{N}$

2) Calculer les quatre premiers termes de la suite (U_n) sachant que :

pour $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} U_{n+1} = -3n^2 + U_n \\ U_0 = -1 \end{cases}$ puis étudier le sens de variation de cette suite en étudiant la différence $U_{n+1} - U_n$

$$\text{On a } U_0 = -1 \text{ et } U_1 = -3 \times 0^2 + U_0 = -1 \text{ et } U_2 = -3 \times 1^2 + U_1 = -3 - 1 = -4$$

$$U_3 = -3 \times 2^2 + U_2 = -3 \times 4 - 4 = -16$$

$$\text{pour } n \in \mathbb{N} \quad U_{n+1} = -3n^2 + U_n \Leftrightarrow U_{n+1} - U_n = -3n^2$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $-3n^2 < 0$ soit $U_{n+1} - U_n < 0$ donc la suite (U_n) est décroissante sur $\mathbb{N}$

3) Calculer les quatre premiers termes de la suite (W_n) sachant que :

$W_n = (-1)^n(n-2)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et en déduire son sens de variation.

$$W_0 = (-1)^0(0-2) = 1 \times (-2) = -2$$

$$W_1 = (-1)^1(1-2) = -1 \times (-1) = -1$$

$$W_2 = (-1)^2(2-2) = 1 \times 0 = 0$$

$$W_3 = (-1)^3(3-2) = -1 \times 1 = -1$$

ainsi $W_0 < W_1$; $W_1 < W_2$ mais $W_2 > W_3$ la suite (W_n) n'est pas monotone sur $\mathbb{N}$

Exercice 3 : On considère la suite (U_n) définie pour tout entier naturel n par $U_n = \frac{n+2}{n+1}$

1) Calculer U_0, U_1, U_2 puis U_{99}

$$U_0 = \frac{0+2}{0+1} = 2 \quad ; \quad U_1 = \frac{1+2}{1+1} = \frac{3}{2} \quad ; \quad U_2 = \frac{2+2}{2+1} = \frac{4}{3} \quad ; \quad U_{99} = \frac{99+2}{99+1} = \frac{101}{100} = 1,01$$

2) a) Exprimer, pour tout entier naturel n , $U_n - 1$ en fonction de n .

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \quad U_n - 1 = \frac{n+2}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = \frac{n+2-n-1}{n+1} = \frac{1}{n+1}$$

On remarque que la différence entre deux termes tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

a) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} - U_n = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= \frac{n+1+2}{n+1+1} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{n+3}{n+2} - \frac{n+2}{n+1} = \frac{(n+1)(n+3) - (n+2)^2}{(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{n^2 + 3n + n + 3 - n^2 - 4n - 4}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)} \quad \text{CQFD} \end{aligned}$$

En déduire le sens de variation de la suite (U_n)

pour tout $n \in \mathbb{N}$ $n+1 > 0$ et $n+2 > 0$ donc $U_{n+1} - U_n$ est du signe de (-1) soit négatif

On en déduit que la suite est décroissante sur $\mathbb{N}$

3) Soit a un nombre réel dans l'intervalle $]1; 2]$.

Compléter **sur ce sujet** le programme Python suivant pour qu'il permette de déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \leq a$, où a est un nombre de l'intervalle $]1; 2]$.

```
Def seuil (a) :  
    n=0  
    While (n+2)/(n+1) > a :  
        n=n+1  
    return n
```

Exercice 4

Soit la suite (V_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $V_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}$

On donne : Pour tout $n \geq 1$ $V_1 \neq 1$

Vérifier que le rapport $\frac{V_{n+1}-1}{V_n-1}$ est indépendant de l'entier n.

Pour tout $n \geq 1$:

$$V_{n+1} - 1 = 1 + (-1)^{n+1} \frac{5}{2^{n+1-1}} - 1 = (-1)^{n+1} \frac{5}{2^n}$$

$$V_n - 1 = 1 + (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}} - 1 = (-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}$$

$\frac{V_{n+1}-1}{V_n-1} = \frac{(-1)^{n+1} \frac{5}{2^n}}{(-1)^n \frac{5}{2^{n-1}}} = (-1)^{n+1-n} \times \frac{5}{2^n} \times \frac{2^{n-1}}{5} = (-1) \times 2^{n-1-n} = (-1) \times 2^{-1} = -\frac{1}{2}$ donc ce rapport est constant et indépendant de l'entier n.