MATHS 2nd	Devoir en Temps Libre n°20	Correction

Exercice 1:

Noah est directeur de l'école de Roques et décide d'utiliser un logiciel de diction pour ses élèves. Il y a trois tarifs disponibles :

- Tarif A : forfait illimité à 19 €
- Tarif B : 0,10€ par élève
- Tarif C : 0,05€ par élève + 8 €

Nombre d'élèves	100	200	300
Tarif A	19 €	19	19
Tarif B	10	20	30 €
Tarif C	13	18 €	23

a) Si x représente le nombre d'élèves, la fonction qui correspond au tarif C est :

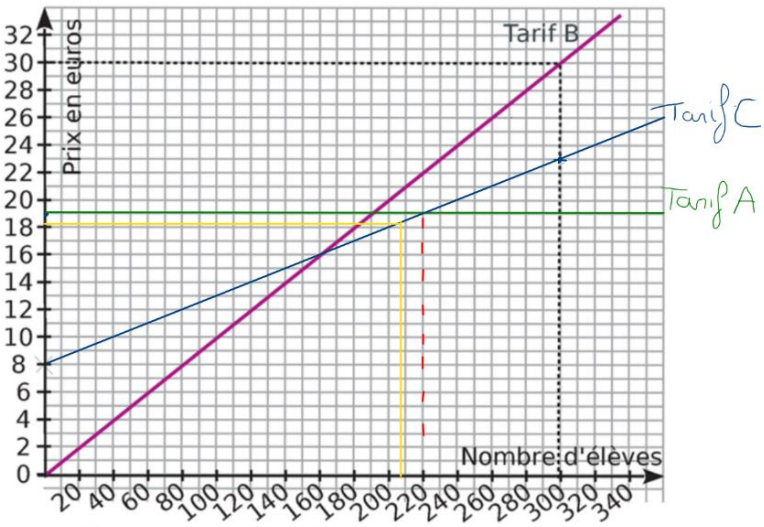
☐ $x \to 8 + 5x$ ☐ $x \to 8x + 0{,}05$ ■ $x \to 0{,}05x + 8$

b) Quelle est la nature de cette fonction ?

L'expression de la fonction est de la forme $ax + b$ C'est donc une fonction affine

c) Sur le graphique ci-contre, on a représenté le tarif B. Sur ce même graphique, représenter les tarifs A et C

d) Par lecture graphique, à partir de combien d'élèves le tarif A est-il plus intéressant que le tarif C ? (*On fera apparaître sur le graphique les tracés nécessaires à la lecture.)*



Par lecture graphique, le tarif A est plus intéressant à partir d'un nombre d'élève supérieur à 220.

e) Dans l'école, il y a 209 élèves. Quel est le tarif le plus intéressant pour l'école ?

Pour un 209 élèves, le tarif C est le plus intéressant.

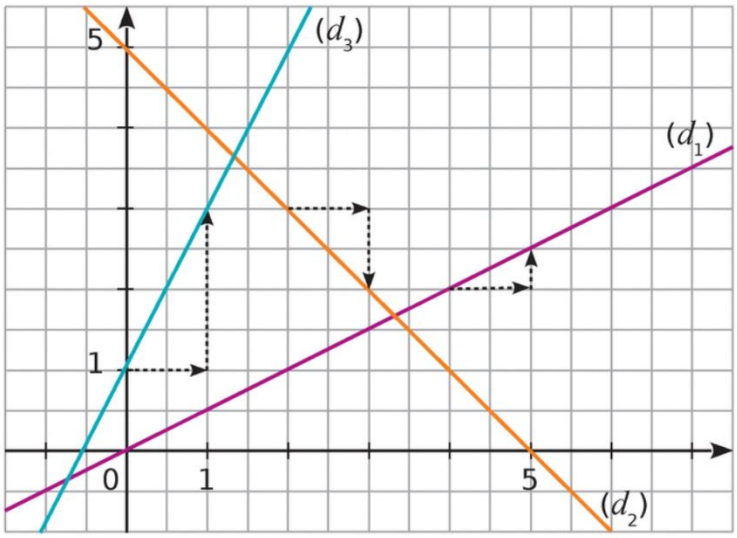
Exercice 2 :

Les droites (d_1), (d_2) et (d_3) sont les représentations graphiques respectives de trois fonctions affines f_1, f_2 et f_3.

a) Indiquer le coefficient directeur de chaque droite ainsi que l'ordonnée à l'origine.

droite	d_1	d_2	d_3
Coefficient directeur	$\frac{+0{,}5}{+1} = 0{,}5$	$\frac{-1}{+1} = -1$	$\frac{+2}{+1} = 2$
Ordonnée à l'origine	0	5	1

En déduire l'expression algébrique de chaque fonction.



En déduire l'expression de chacune des fonctions.

$f_1(x) = 0{,}5x$	$f_2(x) = -x + 5$	$f_3(x) = 2x + 1$

Exercice 3:

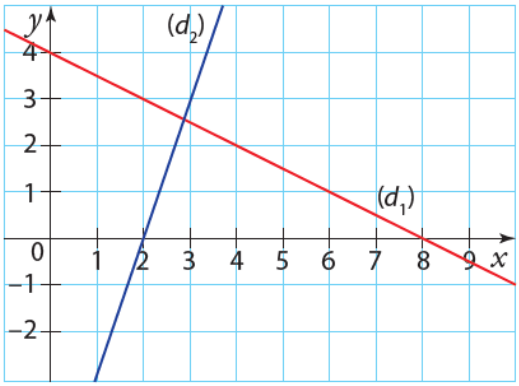
On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = 3x - 6$

$g(x) = -0{,}5x + 4$

Les droites représentatives ont été tracées dans le repère ci-contre.

1. Associer chaque fonction à sa droite représentative.



La représentation graphique de la fonction $f(x)$ est la droite (d_2).

La représentation graphique de la fonction $g(x)$ est la droite (d_1).

2. Résoudre par le calcul $f(x) \geqslant 0$ et $g(x) < 0$.

$f(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3x - 6 \geq 0$ $\Leftrightarrow 3x \geq 6$ $\Leftrightarrow \frac{3x}{3} \geq \frac{6}{3}$ $\Leftrightarrow x \geq 2$ S = $]-\infty\,;2]$	$g(x) < 0 \Leftrightarrow -0{,}5x + 4 < 0$ $\Leftrightarrow -0{,}5x < -4$ $\Leftrightarrow \frac{-0{,}5x}{-0{,}5} > \frac{-4}{-0{,}5}$ $\Leftrightarrow x > 8$ $S = [8\,;+\infty[$

3. Contrôler graphiquement les résultats de la question précédente.

Graphiquement , $f(x) \geqslant 0$ si et seulement si $x \in]-\infty\,;2]$ et $g(x) < 0$ si et seulement si $x \in [8\,;+\infty[$

Exercice 4:

1) Observer le tableau de signe ci-contre, puis écrire l'ensemble des solutions de chaque inéquation.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+1}{x-3}$		$+$	0	$-$	‖	$+$	

$\frac{x+1}{x-3} \leq 0$ $\quad S = [-1\,;3[$

$\frac{x+1}{x-3} > 0$ $\quad S =]-\infty\,;-1[\cup]3;+\infty[$

2) Compléter le tableau de signes ci-dessous sans oublier les zéros.

x	$-\infty$		-4		3		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+4)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

En déduire l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $(x+4)(x-3) \leq 0$

$S = [-4\,;3]$

Exercice 5:

Tous les résultats seront donnés en écriture scientifique.

Les globules rouges du sang sont des disques de 7,5µm (1µm = 10^{-6} m) de diamètre.

Il y a en environ 4,5 millions dans un millilitre de sang.

1) Combien y a-t-il de globules rouges dans les 5 litres de sang d'une personne adulte ?

1 L = 1 000 mL donc 5 L = 5 000 = 5×10^3 mL

Nbre de globules rouges = $4{,}5 \times 10^6 \times 5 \times 10^3 = 2{,}25 \times 10^{10}$

Il y a donc 23 milliards de globules rouges dans le sang.

2) Si on disposait ces globules rouges côte à côte. Calculer la longueur que l'on obtiendrait.
Donner le résultat en mètres puis en kilomètres.

Longueur = $2{,}25 \times 10^{10} \times 7{,}5 \times 10^{-6} = 1{,}6875 \times 10^5$ m $= 168{,}75 \times 10^3$m $=$ 168,75 km

La longueur totale que l'on obtiendrait serait de $168{,}75\ \mathrm{km}$

<u>Exercice 6:</u> Prise initiative

1) On se propose de comparer $A = x^2 + 2$ et $B = 4x - 2$ pour tout nombre réel x.
Pour cela, étudier le signe de la différence $A - B$ et conclure.

Obtenir $A - B < 0$ signifie que $A < B$ tandis que qu'obtenir $A - B > 0$ signifie que $A > B$.

$A - B = x^2 + 2 - (4x - 2) = x^2 + 2 - 4x + 2 = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$

Ainsi $A - B = (x - 2)^2$ or $(x - 2)^2 \geq 0$ donc $A - B \geq 0$ quel que soit la valeur de x

On peut donc conclure que $A \geq B$ quel que soit la valeur de x

2) On se propose de comparer $C = \frac{3^n}{5^{n+1}}$ et $D = \frac{3^{n-1}}{5^n}$ pour tout nombre entier naturel n.

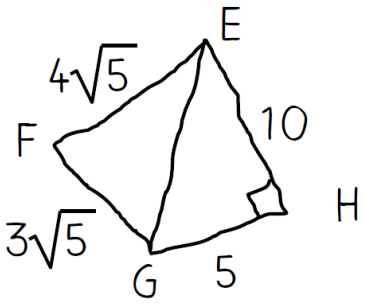
Pour cela, les nombres C et D étant strictement positifs, comparer le quotient $\frac{C}{D}$ à 1 et conclure

Lorsque C et D sont positifs, obtenir $\frac{C}{D} < 1$ signifie que $C < D$ tandis que $\frac{C}{D} > 1$ signifie que $C > D$

$$\frac{C}{D} = \frac{\frac{3^n}{5^{n+1}}}{\frac{3^{n-1}}{5^n}} = \frac{3^n}{5^{n+1}} \times \frac{5^n}{3^{n-1}} = 3^{n-(n+1)} \times 5^{n-(n+1)} = 3^{-1} \times 5^{-1} = (3 \times 5)^{-1} = 15^{-1} = \frac{1}{15}$$

On a donc $\frac{C}{D} = \frac{1}{15} < 1$ donc $C < D$ quelque soit la valeur de n entier naturel.

3) Démontrer que EFG est un triangle rectangle.



En appliquant le théorème de Pythagore au triangle rectangle EHG, on a :

$$EG^2 = EH^2 + GH^2 = 10^2 + 5^2 = 125 \ \ ainsi\ EG = \sqrt{125} = \sqrt{25} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

On a d'une part :

$EF^2 + FG^2 = (4\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2 = 4^2 \times \sqrt{5}^2 + 3^2 \times \sqrt{5}^2 = 16 \times 5 + 9 \times 5 = 80 + 45 = 125$

Et d'autre part : $EG^2 = \left(\sqrt{125}\right)^2 = 125$

On constate que $EF^2 + FG^2 = EG^2$ ce qui équivaut à dire que le triangle EFG est rectangle en F.