

I – Série statistique:

a) Définitions :

La **statistique** est le recueil et l'étude d'un ensemble de **données**, la plupart du temps en grand nombre et permettant de décrire l'état d'une population (personnes, objets, faits ...)

❖ Exemple 1 :

Voici le relevé du nombre de frères et sœurs pour les élèves d'une classe de seconde :

0 ; 3 ; 2 ; 4 ; 2 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 2 ; 5 ; 1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 1 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 3 ; 1 ; 1 ; 0 ; 0 ; 2 ; 1 ; 2 ; 1 ; 1 ; 0 ; 3 ; 2

Cet ensemble de **données** est appelé une **série statistique**.

b) Vocabulaire :

L'ensemble sur lequel on travaille en statistique est appelé la **population**.

Un élément de cet ensemble est appelé un **individu**.

La propriété étudiée sur la population est appelée le **caractère**.

Ce caractère peut prendre différentes **valeurs**.

❖ Dans l'exemple 1 :

- ✓ La **population** étudiée est
- ✓ Les **individus** étudiés sont
- ✓ Le **caractère** étudié est
- ✓ Les **valeurs** prises par le caractère sont:

c) Tableau des effectifs :

Le nombre d'individus (n_i) d'une même valeur est appelé **effectif**.

Le nombre total d'individus (N) de la population est appelé l'**effectif total**.

Méthode : Pour construire un tableau d'effectifs, on regroupe les résultats de la série dans un tableau donnant pour chaque valeur, son effectif :

- On place dans la première ligne les valeurs prises par le caractère par ordre croissant.
- On renseigne les effectifs correspondant aux valeurs dans la deuxième ligne.

Il y a 10 élèves qui ont 0 frère ou sœur d'où la première colonne :

Nombre de frères et sœurs x_i						
Effectif n_i						

Remarque : On vérifie l'effectif total N qui est la somme des effectifs de toutes les valeurs prises par le caractère. Sur l'exemple précédent on a bien $N=10+13+7+3+1+1=35$

❖ **Exercice 1 :** On donne les données suivantes donnant les âges des différents adhérents d'un club sportif :

14 ; 14 ; 14 ; 12 ; 13 ; 15 ; 14 ; 12 ; 13 ; 12 ; 13 ; 15 ; 14 ; 12 ; 14 ; 15 ; 13 ; 13 ; 14 ; 12 ; 12 ; 15 ; 12 ; 14 ; 15 ; 12 ; 13 ; 13.

Compléter le tableau des effectifs :

d) Effectifs cumulés :

L'effectif cumulé croissant de la valeur x_i , noté ECC, est la somme des effectifs de toutes les valeurs inférieures ou égales à x_i .

❖ **Exercice 2 :** Certaines séries statistiques sont regroupées en classe d'intervalles : Un biologiste étudie la taille de 100 pétales d'une fleur, il regroupe les résultats ainsi : Il y a 15 pétales qui mesurent entre 0 et 24 mm :

Taille d'un pétale en mm	[0;24[[24;26[[26;28[[28;30[[30;37[
Effectifs	15	27	20	18	20
ECC					

II – Les paramètres d'une série statistique : Indicateurs de tendance centrale

a) La moyenne pondérée :

La moyenne pondérée de la série statistique (x_i) ci-contre est le nombre réel, noté m (ou \bar{x}), tel que :

$$m = \frac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + \dots + n_p x_p}{N} \text{ ou } m = f_1 x_1 + f_2 x_2 + \dots + f_p x_p$$

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p
Fréquence	f_1	f_2	...	f_p

Effectif total : $N = n_1 + n_2 + \dots + n_p$

❖ **Exemple 1 :**

Nombre de frères et sœurs x_i	0	1	2	3	4	5
Effectif n_i	10	13	7	3	1	1

La **moyenne** de la série est

❖ **Exemple 2 : Calcul de la moyenne à partir des fréquences:**

Dans une ville, la répartition du nombre d'habitant par logement est donnée par le tableau ci-dessous :

Nombre d'habitants x_i	0	1	2	3	4	5
fréquence f_i en %	1,7	35,1	34	18	15,5	4,3

La **moyenne** de la série est

❖ **Exemple 3 : Calcul de la moyenne d'une série regroupée en classe d'intervalle :**

Il va falloir chercher le centre de chaque classe, en faisant la moyenne des deux nombres extrémités de chaque intervalle :

Taille d'un pétale en mm	[0;24[[24;26[[26;28[[28;30[[30;37[
Centre de la classe					
Effectifs	15	27	20	18	20

La **moyenne** de la série est

Remarque : La moyenne n'est pas forcément égale à une des valeurs prises par le caractère.

b) Linéarité de la moyenne :

a et b désignent des nombres réels.

Si la série (x_i) a pour moyenne m , alors la série $(ax_i + b)$ a pour moyenne $M = am + b$.

x_i	x_1	x_2	...	x_p
$ax_i + b$	$ax_1 + b$	$ax_2 + b$...	$ax_p + b$
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

Démonstration

$$M = \frac{n_1(ax_1 + b) + n_2(ax_2 + b) + \dots + n_p(ax_p + b)}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = \frac{a(n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p) + b(n_1 + n_2 + \dots + n_p)}{n_1 + n_2 + \dots + n_p}$$

$$M = a \times \frac{n_1x_1 + n_2x_2 + \dots + n_px_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} + b \times \frac{n_1 + n_2 + \dots + n_p}{n_1 + n_2 + \dots + n_p} = am + b$$

c) La médiane :

On considère la série statistique dont les valeurs sont ordonnées par ordre **croissant**.

La **médiane** est le nombre **Me** qui partage une série ordonnée en deux groupes de même effectif.

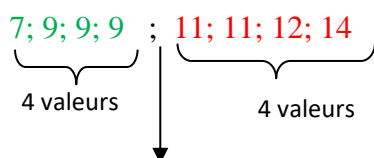
- Si l'effectif est impair, $N = 2k + 1$ (k entier), la médiane est la valeur de la donnée au rang $k + 1$.
- Si l'effectif est pair, $N = 2k$ (k entier), la médiane est un nombre entre la valeur de la donnée au rang k et la valeur de la donnée au rang $k + 1$.

❖ **Exemple 1 :** On distingue deux cas, selon que l'effectif total de la série est pair ou impair.

Note de Léa (effectif pair) : 12; 9; 11; 9; 14; 9; 7; 11

On ordonne la série: 7; 9; 9; 9; 11; 11; 12; 14

L'effectif total est $N = 8$; $8 : 2 = 4$ donc la médiane est la demi-somme des 4^{ème} et 5^{ème} données

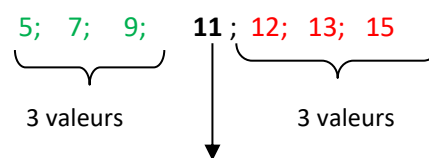


Tous les nombres supérieurs à 9 et inférieurs à 11 partagent la série en deux séries d'effectif égal. On prend en général la moyenne des deux valeurs (ici 9 et 11), soit 10. La médiane des notes de Léa est 10, on dit aussi que c'est la note médiane.

Note de Tom (effectif impair) : 12; 9; 13; 11; 5; 7; 15

On ordonne la série: 5; 7; 9; 11; 12; 13; 15

L'effectif total est $N = 7$; $7 : 2 = 3,5$ donc la médiane est la 4^{ème} donnée.



Il y a 3 données inférieures ou égales à la médiane et 3 données supérieures ou égales à la médiane.

❖ **Exemple 2 :** Série sous la forme d'un tableau d'effectif

Lorsque la série est donnée par un tableau, on rajoute une ligne au tableau : la ligne des ECC

Consommation quotidienne de lait (en L)	0,25	0,50	0,75	1
effectif	5	11	3	6
ECC				

d) Les quartiles :

Le **premier quartile** Q_1 d'une série est la plus petite valeur prise par le caractère telle **qu'au moins 25 % des données** aient une valeur inférieure ou égale.

Le **troisième quartile** Q_3 d'une série est la plus petite valeur prise par le caractère telle **qu'au moins 75 % des données** aient une valeur inférieure ou égale.

L'**écart interquartile** est la différence $Q_3 - Q_1$.

❖ Exemple 1 :

Notes de Léa : 7, 9, 9, 9, 11, 11, 12, 14

L'effectif total est $N = 8$.

$8 : 4 = 2$ Q_1 est donc la donnée de rang 2, soit $Q_1 = 9$

$\frac{3}{4} \times 8 = 6$ Q_3 est donc la donnée de rang 6, soit $Q_3 = 11$

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 11 - 9 = 2$

Notes de Tom : 5, 7, 9, 11, 12, 13, 15

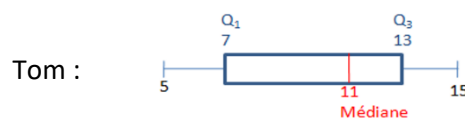
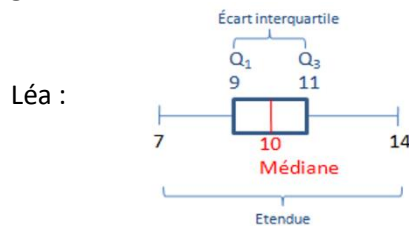
L'effectif total est $N = 7$.

$7 : 4 = 1,75$ Q_1 est donc la donnée de rang 2, soit $Q_1 = 7$

$\frac{3}{4} \times 7 = 5,25$ Q_3 est donc la donnée de rang 6, soit $Q_3 = 13$

L'écart interquartile est : $Q_3 - Q_1 = 13 - 7 = 6$

Diagrammes en boîte résumant les indicateurs des deux séries :



❖ Exemple 2 : Détermination des quartiles à l'aide du tableau des fréquences cumulées.

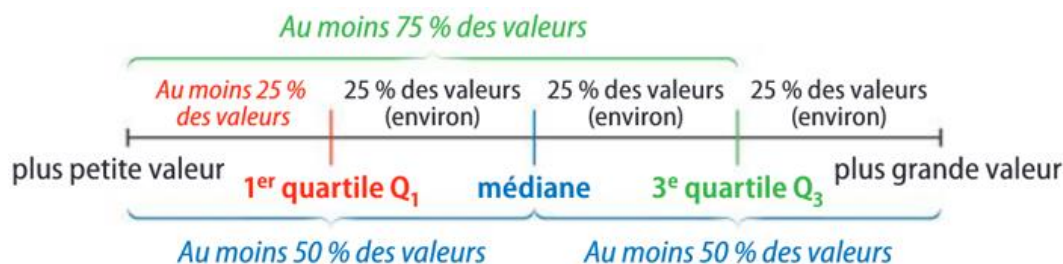
- ✓ On calcule les fréquences cumulées (FCC)
- ✓ On lit la plus petite valeur telle que 25% (respectivement 75%) des données lui soit inférieures. C'est le 1er quartile (respectivement 3ème quartile)

Nombre de frères et sœurs x_i	0	1	2	3	4	5
Effectif n_i	10	13	7	3	1	1
ECC						
FCC						

L'effectif total de cette série est $N = 35$.

On peut directement lire dans ce tableau la fréquence des données inférieures ou égales à une valeur donnée.

Récapitulatif :



Remarques : Les valeurs extrêmes d'une série n'ont pas d'influence sur la médiane d'une série statistique alors qu'elles en ont sur la moyenne. Le mode d'une série est la valeur qui a le plus grand effectif.

III – Les paramètres d'une série statistique : Indicateurs de dispersion :

a) L'étendue :

L'étendue d'une série statistique est la différence entre la plus grande et la plus petite valeur .

❖ **Exemple :** On a relevé la température à différents moments d'une journée. Voici les températures en degrés Celsius : 5 ; 3 ; 6 ; 12 ; 15 ; 9 ; -7.

$$\text{Etendue} = 15 - (-7) = 22^{\circ}\text{C}$$

L'étendue de cette série est de 22°C.

b) La variance et écart-type :

La variance d'une série statistique est le réel noté V , défini par :

$$V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + n_2(x_2 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}$$

L'écart-type d'une série statistique est le réel noté s ou σ , défini par $s = \sqrt{V}$.

Valeur	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

L'écart-type mesure la dispersion des valeurs autour de la moyenne : plus il est grand, plus les valeurs sont dispersées.

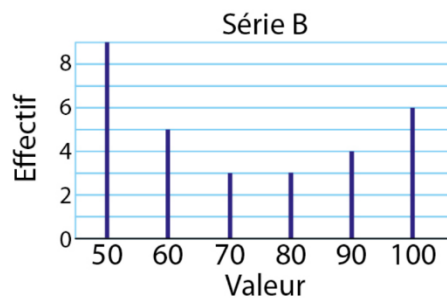
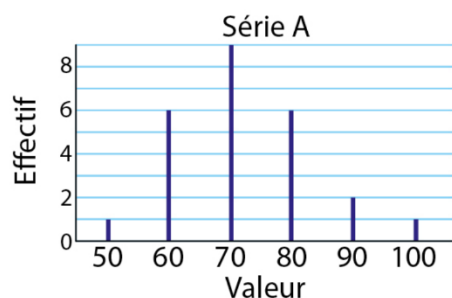
❖ **Exemple :** Soit la série statistique donnée par le tableau ci-dessous.

Valeur x_i	1	2	4	5
Effectif n_i	2	5	9	4

c) Décrire les différences entre deux séries :

Pour étudier une série statistique, on utilise souvent un couple associant un indicateur de tendance centrale à un indicateur de dispersion ; généralement on choisit (médiane ; écart inter quartile) ou (moyenne ; écart-type).

❖ Exemple : On souhaite comparer les séries A et B suivantes




Compléter le tableau suivant et interpréter les résultats :

	Effectif total	Moyenne	Écart-type
Série A	25		
Série B	30		

III – Etude d’une série statistique avec une calculatrice :

On cherche à calculer les différents paramètres de la série statistique ci-contre.

Valeur	1	3	4	5	6	8
Effectif	1	5	7	8	5	2

Avec une calculatrice Casio	Avec une calculatrice Texas
Saisie des données	
<p>Accès au mode statistique : touche MENU puis sélectionner l’icône  puis EXE.</p> <p>Saisir les valeurs dans une liste, par exemple List 1, et les effectifs dans une autre liste, par exemple List 2.</p> <p>Utiliser la touche EXE pour passer d’une valeur à l’autre et les flèches pour se déplacer dans les listes.</p>	<p>Accès au mode statistique : touche stats.</p> <p>Choisir le menu EDIT, puis sélectionner 1: Modifier suivi de entrer.</p> <p>Saisir les valeurs dans une liste, par exemple L1, et les effectifs dans une autre liste, par exemple L2. Pour passer d’une valeur à l’autre ou pour changer de liste, se servir des flèches du curseur.</p>
Calcul de paramètres statistiques – Séries avec effectifs	
<p>Activer le menu CALC (touche F2), puis le menu SET (touche F6).</p> <p>Choisir List1 pour 1VarX List et List2 pour 1Var Freq : LIST s’obtient à l’aide de la touche F2, qu’on complète ensuite avec le numéro de la liste. Valider en appuyant deux fois sur la touche EXE.</p> <p>Sélectionner le menu 1-Var (touche F1).</p> <p>Les paramètres s’affichent.</p> <p>\bar{x} est la moyenne, Σx est la somme des valeurs, σx est l’écart-type et n est l’effectif total.</p> <p>On utilise les flèches du curseur pour avoir d’autres résultats.</p> <p>On peut alors lire la médiane (Med) les valeurs minimum (minX) et maximum (maxX) ainsi que les 1^{er} et 3^e quartiles (Q1 et Q3).</p>	<p>À l’aide de la touche stats, choisir le menu CALC, puis sélectionner 1: Stats 1-Var, suivi de entrer :</p> <p>Stats 1-Vars apparaît à l’écran.</p> <p>Compléter L1 pour XListe et L2 pour ListeFréq (L1 et L2 s’obtiennent à l’aide des touches 2nde 1 et 2nde 2). Puis sélectionner Calculer, puis entrer.</p> <p>Les paramètres s’affichent.</p> <p>\bar{x} est la moyenne, Σx est la somme des valeurs, σx est l’écart-type et n est l’effectif total.</p> <p>On utilise les flèches du curseur pour avoir d’autres résultats.</p> <p>On peut alors lire la médiane (Med) les valeurs minimum (minX) et maximum (maxX) ainsi que les 1^{er} et 3^e quartiles (Q1 et Q3).</p>
Calcul de paramètres statistiques – Série brute	
<p>Quand la série est une liste dont les effectifs sont tous 1, il suffit de saisir les valeurs dans une liste, par exemple List1 et de choisir « 1 » pour 1Var Freq.</p>	<p>Quand la série est une liste dont les effectifs sont tous 1, il suffit de saisir les valeurs dans une liste, par exemple L1, et de laisser vide la rubrique ListFréq.</p>
Effacement des données	
<p>Instruction QUIT (touches SHIFT EXIT).</p> <p>Placer le curseur sur une valeur de la liste à effacer, taper F6 puis sélectionner DEL-A (touche F4).</p>	<p>Placer le curseur sur le nom de la liste à effacer, puis utiliser la touche annul suivi de entrer.</p>

 Les valeurs des quartiles ne sont pas nécessairement les mêmes que celles obtenues avec la méthode utilisée dans le cours.