MATHS 2nd	Devoir en Temps Libre n°22 **Prépa devoir commun**	Correction

Exercice 1:

Un magasin propose des jeans à 48 € et des pulls à 35 € .

a) La directrice du magasin décide de réduire de 15% le prix des jeans .
Calculer le prix d'un jean après réduction.

Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 15% est $CM = 1 - \frac{15}{100} = 0{,}85$.

$48 \times 0{,}85 = 40{,}8$.

Donc Le prix des jeans après réduction est 40,80 €.

b) Deux semaines plus tard, la directrice décide de réaliser une deuxième démarque sur les jeans. Calculer le nouveau prix après réduction, quel est le taux de réduction global proposé par cette nouvelle démarque ?

Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs :

$CM_{glob} = 0{,}85 \times 0{,}85 = 0{,}7225$

Le taux associé est $T_{glob} = CM_{glob} - 1 = -0{,}2775$ ce qui correspond donc à une baisse de 27,75%

Exercice 2:

Le nombre d'utilisateurs d'une société de coursiers a augmenté de 30% en mai, puis de 60% en juin.

a) Déterminer le taux d'évolution global du nombre d'utilisateurs sur ces deux mois.

Le coefficient multiplicateur global est le produit des coefficients multiplicateurs.

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 30% est $CM = 1 + \frac{30}{100} = 1{,}3$.

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de 60% est $CM = 1 + \frac{60}{100} = 1{,}6$.

Le coefficient multiplicateur global est donc $CM_{glob} = 1{,}3 \times 1{,}6 = 2{,}08$.

Le taux associé est $T_{glob} = CM_{glob} - 1 = 1{,}08$ ce qui correspond donc à une hausse de 108%

b) Le taux moyen d'évolution est le taux unique t%, qui, appliqué ici deux fois successivement aurait permis d'obtenir l'évolution réelle. Déterminer la valeur de t . *Arrondir au centième*.

Le coefficient multiplicateur associé à une hausse de t% est $CM = 1 + \frac{t}{100}$

Le coefficient multiplicateur global pour 2 hausses de t% est donc : $CM_{glob} = CM \times CM = CM^2$.

On sait que $CM_{glob} = 2{,}08$.

Donc $CM^2 = 2{,}08$ et donc $CM = \sqrt{2{,}08} \approx 1{,}4422$.

Le taux associé t est donc : $t = CM - 1 \approx 0{,}4422$ ce qui correspond à une hausse de 44,22%.

Exercice 3:

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse et justifiez votre réponse par une démonstration, un calcul ou un contre-exemple.

Vous préciserez les étapes intermédiaires des calculs

Affirmation 1 : La somme de deux nombres premiers est nombre pair

Faux. Contre-exemple : 2 et 3 sont des nombres premiers et 2+3=5 qui est impair.

Affirmation 2 : Le nombre $A = \frac{255}{690}$ admet pour écriture irréductible $\frac{17}{46}$

Vrai. La décomposition en produit de facteurs premiers de 255 est $255 = 3 \times 5 \times 17$.

Celle de 690 est : $690 = 2 \times 3 \times 5 \times 23$.

On a donc $\frac{255}{690} = \frac{3\times5\times17}{2\times3\times5\times23} = \frac{17}{46}$.

Affirmation 3 : Le nombre $B = \frac{8\sqrt{13}}{\sqrt{26}\times\sqrt{8}}$ est un nombre entier.

Vrai. $\sqrt{26} = \sqrt{2} \times \sqrt{13}$ et $\sqrt{8} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2 \times \sqrt{2}$ donc $B = \frac{8\sqrt{13}}{\sqrt{26}\times\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{13}}{\sqrt{2}\times\sqrt{13}\times 2\times\sqrt{2}} = \frac{8}{2\times 2} = 2$ qui est un nombre entier.

Affirmation 4 : Le produit de deux nombres impair est un nombre impair

Vrai.

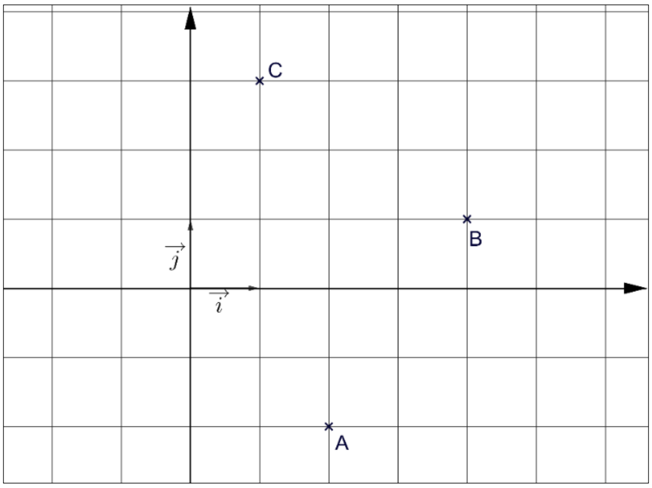
Soient n et p deux nombres impairs. On a $n = 2k + 1$ et $p = 2m + 1$ avec k et m entiers.

On a alors $n \times p = (2k + 1)(2m + 1) = 4km + 2k + 2m + 1 = 2(2km + k + m) + 1$

Et comme $2km + k + m$ est entier, $n \times p$ est un nombre impair.

Exercice 4:

On se place dans un repère orthonormé, et l'on considère les points $A(2\,;-2)$ $B(4\,;\,1)$ et $C(1;3)$ représentés ci-contre.



1) Déterminer par calcul les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$, puis celle de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}\,(4-2;1-(-2))$ $\overrightarrow{AB}\,(2;\,3)$	$\overrightarrow{AC}\,(1-2;3-(-2))$ $\overrightarrow{AC}\,(-1;\,5)$
$\overrightarrow{BC}\,(1-4;3-1) = (-3;\,2)$	

2) Déterminer par calcul les distances AB et AC, en déduire la nature du triangle ABC.

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$

$AC = \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{(-1)^2 + 5^2 = \sqrt{26}}$

$BC = \|\overrightarrow{BC}\| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 = \sqrt{13}}$

AB=BC donc ABC est isocèle en B.

De plus :

On a d'une part :

$AB^2 + BC^2 = (\sqrt{13})^2 + (\sqrt{13})^2 = 2 \times 13 = 26$

Et d'autre part : $AC^2 = \left(\sqrt{26}\right)^2 = 26$

On constate que $AB^2 + BC^2 = AC^2$ ce qui équivaut à dire que le triangle ABC est rectangle en B d'après la propriété de Pythagore.

Donc ABC est rectangle isocèle en B

3) Déterminer par calcul les coordonnées du milieu I de [AC]

$I\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\,\frac{y_A+y_C}{2}\right) = \left(\frac{2+1}{2}\,;\,\frac{-2+3}{2}\right) = (1{,}5\ ;\ 0{,}5)$

4) Déterminer les coordonnées $(x_M; y_M)$ du point M tel que ABCM est un parallélogramme.

ABCM est un parallélogramme, ce qui équivaut à $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC}$.

On a $\overrightarrow{AB}\binom{2}{3}$ et $\overrightarrow{MC}\binom{1-x}{3-y}$.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow 2 = 1 - x \; et \; 3 = 3 - y \Leftrightarrow x = -1 \; et \; y = 0$ donc M(-1 ;0).

5) On considère le point D(3 ;-7), les points A, C et D sont-ils alignés ?

$\overrightarrow{AC}\binom{-1}{5}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}3-2\\-7-(-2)\end{pmatrix}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{AD}\binom{1}{-5}$.

$\det(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}) = \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 5 & -5\end{vmatrix} = -1\times(-5)-5\times 1 = 0$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont colinéaires, donc les points A, C et D sont alignés.

Exercice 5

1)Résoudre les équations suivantes

$(5x+1)(8-x) = 0$ équivaut à $5x+1=0$ ou $8-x=0$ $\Leftrightarrow 5x=-1$ ou $\Leftrightarrow 8=x$ $\Leftrightarrow x=-\frac{1}{5}$ ou $\Leftrightarrow x=8$ $S=\left\{-\frac{1}{5};8\right\}$	$(3x-1)+(7-x) = 0$ $\Leftrightarrow 3x-1+7-x = 0$ $\Leftrightarrow 2x+6 = 0$ $\Leftrightarrow 2x = -6$ $\Leftrightarrow x=-\frac{6}{2}=-3$ $S=\{-3\}$	$(8+3x)-(x+3) = 0$ $\Leftrightarrow 8+3x-x-3 = 0$ $\Leftrightarrow 2x+5 = 0$ $\Leftrightarrow 2x = -5$ $\Leftrightarrow x=-\frac{5}{2}=-2{,}5$ $S=\{-2{,}5\}$
$(3-10x)(x+23) = 0$ équivaut à $3-10x=0$ ou $x+23=0$ $\Leftrightarrow 3=10x$ ou $\Leftrightarrow x=-23$ $\Leftrightarrow x=\frac{3}{10}$ ou $\Leftrightarrow x=-23$ $S=\left\{-23;\frac{3}{10}\right\}$	$x^2 = 19$ équivaut à $x=-\sqrt{19}$ *ou* $x=\sqrt{19}$ $S=\{-\sqrt{19};\sqrt{19}\}$	$(x-3)^2 = 5$ équivaut à $x-3=-\sqrt{5}$ ou $x-3=\sqrt{5}$ $\Leftrightarrow x=3-\sqrt{5}$ ou $\Leftrightarrow x=3+\sqrt{5}$ $S=\{3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}\}$

2) Développer et réduire

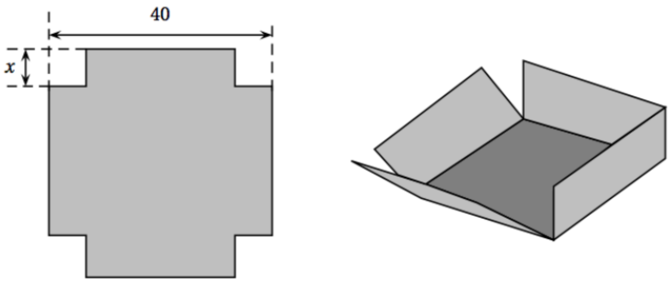
$(2x+3)(x-5) = 2x^2-10x+3x-15$ $= 2x^2-7x-15$	$(5x+1)^2 = 25x^2+10x+1$
$(3x-2)(2x+7) = 6x^2+21x-4x-14$ $= 6x^2+17x-14$	$(2x-3)^2 = 4x^2-12x+9$

3) Factoriser

$(3x-1)^2-25 = (3x-1+5)(3x-1-5) =$ $(3x+4)(3x-6)$	$(2x+3)^2-1$ $= (2x+3-1)(2x+3+1)$ $= (2x+2)(2x+4)$

Exercice 6:

On dispose d'un carré en métal de 40 cm de côté. Pour construire une boîte parallélépipédique, on retire à chaque coin un carré de côté x cm et on relève les bords par pliage (voir figure).



On note f la fonction qui au nombre x associe le volume $f(x)$ de la boîte obtenue.

1. Donner l'ensemble de définition de f.

L'ensemble de définition de la fonction f est l'intervalle $[0; 20]$

2. Calculer $f(5)$ et interpréter le sens concret de ce résultat.

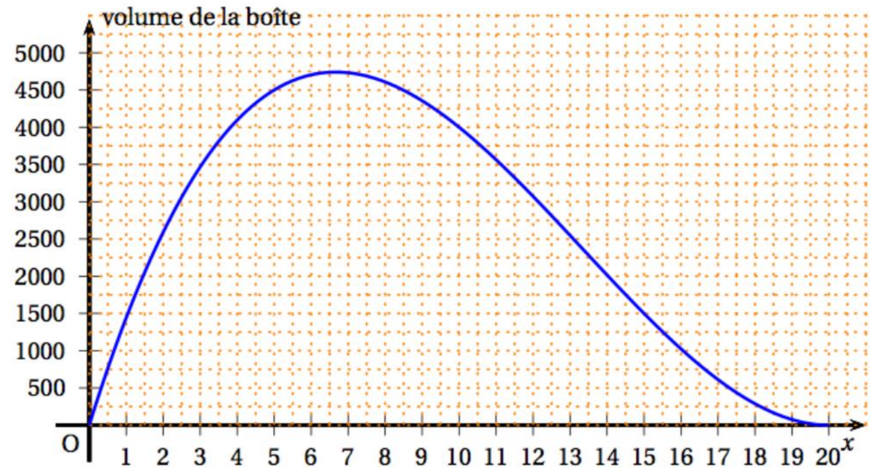
Soit f la fonction qui au nombre x associe le volume $f(x)$ de la boîte obtenue , cette fonction est définie sur $[0; 20]$ et a pour expression algébrique : $f(x) = (40 - 2x)^2 \times x$.

$f(5) = (40 - 2 \times 5) \times 5 = 30^2 \times 5 = 4500$

Si on enlève un carré de côté 5 cm de côté de chaque coin, on obtient un volume pour la boîte de 4 500 cm^3.

3. Donner les éventuels antécédents de 2 500 par f et interpréter le résultat.

Les antécédents de 2500 par f sont 2 et 13, ce qui signifie que pour obtenir une boîte dont le volume est 2 500 cm^3, il faut que $x = 2\ cm$ ou $x = 13cm$.



4. Pour quelles valeurs de x le volume de la boîte est-il inférieur à 2 000 cm^3 ?

Le volume de la boîte est inférieur à 1 500 cm^3 si

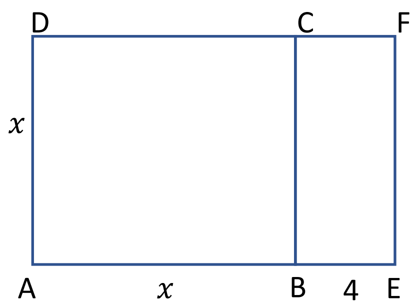
$x \in [0\,;1[\, \cup\,]\,15\,;20]$

5. Quel volume maximum peut-on obtenir en fabriquant une boîte comme ceci ? Pour quelle valeur de x ce volume maximal est-il atteint ?

Le volume maximal de la boîte est d'environ 4 750 cm^3 et il atteint pour x≈ 6,5 cm

Exercice 7 :

On considère le rectangle AEFD ci-contre, formé d'un carré ABCD de côté x cm avec $x > 0$ et d'un rectangle BEFC tel que $BE = 4\ cm$. On note A l'aire du rectangle AEFD en cm^2.



a) Exprimer A en fonction de x sous forme développée.

$A = AE \times AD = (x + 4) \times x = x^2 + 4x$

b) Vérifier que $A = (x + 2)^2 - 4$

$(x + 2)^2 - 4 = x^2 + 4x + 4 - 4 = x^2 + 4x = A$

c) Quelles sont les dimensions du rectangle AEFD lorsque $A = 77cm^2$.

A =77 $\Leftrightarrow$ $(x+2)^2 - 4 = 77$
$\Leftrightarrow$ $(x+2)^2 = 81$
$\Leftrightarrow$ $x + 2 = 9$ ou $\Leftrightarrow$ $x + 2 = -9$
$\Leftrightarrow$ $x = 7$ ou $x = -11$
Or $x > 0$ donc les dimensions du rectangle AEFD sont $AE = 11$ et $AD = 7$

<u>Exercice 8</u> :
f est la fonction définie sur par : $f(x) = 5 - x^2$ sur
1a) Calculer $f(0)$.
$f(0) = 5 - 0^2 = 5$
2b) Démontrer que 5 est le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Pour tout nombre réel x, $x^2 \geq 0$ donc $-x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 5 - x^2 \leq 5$
Or $f(0) = 5$ donc $f(x) \leq f(0)$
Le maximum de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est donc $f(0) = 5$.